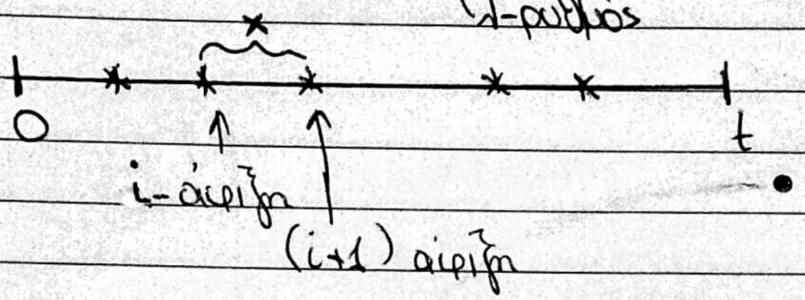
29/11/2016

Μαθημα 15ο
Πιθανότητες

Εκθετική Κατανομή

Διαδικασία Poisson



Έστω X μεταξύ διαδοχικών αφίξεων
Τιμές X : $x > 0$

σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$

α.σ.κ. $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$

Μοντέλο χρόνου ζωής

Ιδιότητα Αμνησίας

Αν $x, x_0 > 0$: $P(X > x + x_0 \mid X > x_0) = P(X > x)$

Παράδειγμα 1.

Χρόνος ζωής $\sim$ Εκθ $\left(\lambda = \frac{1}{500}\right)$

(α) P (να ζήσει περισσότερο 500h)

(β) P (να ζήσει μεταξύ 500' και 600h)

(γ) P (να ζήσει περισσότερο από 800h δεδομένου ότι έχει ζήσει περισσότερο από 300h)

Λύση.

Έστω X χρόνος ζωής. Τότε $X \sim$ Εκθ $(\lambda = 1/500)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{500} \cdot e^{-x/500} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/500} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) $P(X > 500) =$

σ.π.π. $\displaystyle\int_{500}^{+\infty} \frac{1}{500} e^{-x/500}\, dx = \ldots = e^{-1}$

α.σ.κ. $1 - P(X \leq 500) = 1 - F_X(500) =$
$= 1 - (1 - e^{-500/500}) = e^{-1}$

(β) $P(500 \leq X \leq 600) =$ σ.π.π. $\displaystyle\int_{500}^{600} \frac{1}{500} e^{-x/500}\, dx = \ldots =$
$= e^{-1} - e^{-1,2}$

α.σ.κ. $F_X(600) - F_X(500) = \ldots$

must...

γ) α΄ τρόπος

$$P(X>800 \mid X>300) = \frac{P(X>800 \text{ και } X>300)}{P(X>300)} =$$

$$= \frac{P(X>800)}{P(X>300)} = \ldots$$

β΄ τρόπος

$$P(X>800 \mid X>300) = P(X>500+300 \mid X>300) =$$

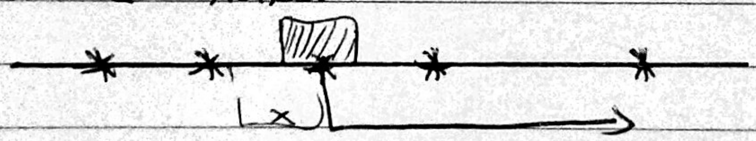
$$= P(X>500) = 1 - F_X(500) = \ldots$$

ιδιότητα αμνησίας

Παράδειγμα 2

ρυθμό 2 αυτοκίνητα ανά 10 λεπτά $\left(\lambda = \frac{2 \text{ αυτοκ.}}{10 \text{ min}} \right)$

P (Το πρατήριο να μείνει χωρίς αυτοκίνητο περισσότερο από 16 λεπτά)



Λύση

Έστω X ο χρόνος σε λεπτά από την στιγμή που το αυτοκίνητο που εξυπηρετήθηκε φεύγει μέχρι την στιγμή που θα φτάσει το επόμενο αυτοκίνητο.

Το X παριστά τον χρόνο σε λεπτά μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson. Άρα $X \sim \text{Εκθ}(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 0{,}2\, e^{-0{,}2x} & , x>0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$P(X>16) =$ σππ: $\displaystyle\int_{16}^{\infty} 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2x}\,dx = \dots$

α.σ.κ.: $1 - F_X(16) = 1 - \left(1 - e^{-0{,}2 \cdot 16}\right) = \dots$

Άσκηση 4.6.2 σελ 152

$8A,\ 6B \xrightarrow[\text{επανατοποθέτηση}]{\text{χωρίς}} 4$

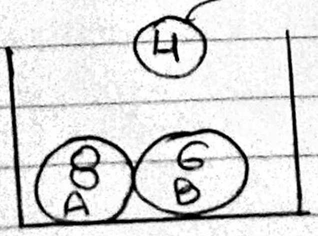
(α) P(Στους 4 που θα επιλεγούν οι οπαδοί της A να είναι τριπλάσιοι των οπαδών της B)

(β) P(Η διαδικασία επαναλαμβάνεται 5 φορές, ακριβώς 2 φορές οι οπαδοί της A είναι 3-πλάσιοι των οπαδών της B)

(γ) P(Η διαδικασία να επαναληφθεί 3 φορές έως όταν οι οπαδοί της A να είναι 3-πλάσιοι των οπαδών της B)

Λύση

(α)



χωρίς επανατοποθέτηση.

$$P\begin{pmatrix}3 \to A\\ 1 \to B\end{pmatrix} = P(X=3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{1}}{\binom{14}{4}} = 0{,}3357$$

Υπεργεωμετρική

Έστω X τ.μ. παριστά οπαδούς του A στους 4

$X \sim Hg(M=8,\ N=6,\ n=4)$

(β) $n=5$ επαναλήψεις
$E = \{$ σε κάθε επανάληψη οι οπαδοί της A 3-πλάσιοι των οπαδών της B $\}$

$X =$ πλήθος E στις 5 επαναλήψεις
$X \sim B(n=5, p=P(E)=0{,}3375)$

$$P_X(x) = \binom{5}{x} 0{,}3375^x (1-0{,}3375)^{5-x} \quad , x=0,\dots,5$$

άρα $P(X=2) = p_X(2) = \binom{5}{2} 0{,}3375^2 (1-0{,}3375)^{5-2} = \dots$

(γ) Έστω Y πλήθος επαναλήψεων μέχρι την 1η επιτυχία
$Y \sim Geo(p=0{,}3357)$
$p_Y(y) = (0{,}3357)(1-0{,}3357)^{y-1}$
$P(Y=3) = \dots = 0{,}1481$

Άσκηση 4.6.4
(α) Αν επαναλάβει την διαδικασία 4 φορές
(i) P(να μην εκπυρσοκροτήσει το όπλο)
(ii) P(να εκπυρσοκροτήσει 2 φορές)
(β) Αν επαναλαμβάνει συνεχώς την διαδικασία
P(εκπυρσοκροτήσει την 4 φορά)

Λύση
(α) Έστω $E = \{$ να εκπυρσοκροτήσει $\}$
Έστω X πλήθος φορών που εκπυρσοκροτεί στις 10 επαναλήψεις.
$X \sim B(n=10, p=P(E)=1/6)$

$$p_X(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}, \quad x=0,\dots,10$$

(i) $P(X=0) = p_X(0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10-0} = 0{,}1615$

(ii) $P(X=2) = p_X(2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10-2} = \dots$

(β) Έστω Y πλήθος επαναλήψεων μέχρι την 1η E
δλδ μέχρι να εκπυρσοκροτήσει για 1η φορά

$Y \sim Geo\left(p = P(E) = 1/6\right)$

$P(Y=4) = p_Y(4) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = \dots$

Άσκηση 4.6.5.

Προσλαμβάνονται ΑΝ λιγότερα από 4 λάθη σε ένα δισέλιδο κείμενο.
Υποψήφια → κάνει 2 λάθη ανά σελίδα
P(υποψήφια να επιλεγεί) = ;

Λύση

Έστω X πλήθος λαθών της υποψήφιας στο δισέλιδο κείμενο

$$P(X \le 4) = \sum_{x \le 4} p_X(x) = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!} = 0{,}6289$$

$X \sim P(\lambda)$

$X \sim P(\lambda)$

1 σελίδα 2 λάθη

2 σελίδα $\lambda = ;$

$\lambda = 4$

$$X \sim P(\lambda = 4)$$

$$P_X(x) = \frac{e^{-4}\, 4^x}{x!} \quad , x = 0, \dots$$

Άσκηση 4.6.7.

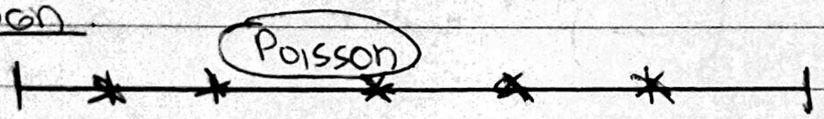
P(το πολύ ένα τροχαίο) = 4·(P(2 τροχαία))

ⓐ P(κανένα τροχαίο σε ένα μήνα)

ⓑ P(το πολύ δύο τροχαία σε δύο μήνες)

ⓒ P(σε 6 μήνες να υπάρχει τουλάχιστον ένα δίμηνο στο οποίο δεν έχει συμβεί τροχαίο)

Λύση.



Έστω X πλήθος τροχαίων σε 1 μήνα

$X \sim P(\lambda)$

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad , \lambda = 1.$$

$$P(X \leq 1) = 4\, P(X = 2)$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^x}{x!} = \frac{4\, e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!} \Longrightarrow \text{πράξεις} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$\lambda = -1/2$ απορρίπτεται.

ⓐ $P(X=0) = p_X(0) = \frac{e^{-1}\, 1^0}{0!} = e^{-1}$

(β) Έστω Y το πλήθος των τροχαίων στους 2 μήνες

$$\left.\begin{array}{l} Y \sim P(\lambda) \\ 1 \text{ μήνα } \quad 1 \text{ τροχαίο} \\ 2 \quad -''- \quad \lambda = ; \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 2.$$

Άρα, $P(Y \leq 2) = \sum_{y=0}^{2} \frac{e^{-2} 2^y}{y!} = 5 e^{-2}$

(γ) Έστω $E = \{$σε ένα δίμηνο να μην συμβεί ατύχημα$\}$

Έστω Z τ.μ. πλήθος E στα 3 δίμηνα

$Z \sim B(n=3, p = P(E) = P(Y=0))$

Άρα, $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z=0) =$

$= 1 - P_Z(0)$.